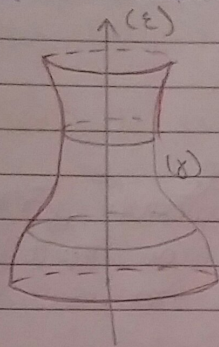


13/05/2018
Αν Γεωμετρία

Δ Επιφάνειες εκ περιστροφής:

Ορισμός: Μια επιφάνεια λέγεται επιφάνεια εκ περιστροφής όταν παράγεται με περιστροφή μιας καμπύλης γύρω από μια ευθεία.



Η καμπύλη που περιστρέφεται ονομάζεται γενετρίδα και η ευθεία γύρω από την οποία γίνεται η περιστροφή ονομάζεται άξονας περιστροφής.

Παρατήρηση: Κάθε επίπεδο της γενετρίδας κατά την περιστροφή χαράζει μια περιφέρεια κύκλου. Το κέντρο του κύκλου αυτού βρίσκεται επί του άξονα και είναι σε επίπεδο κάθετο στον άξονα. Συνέπως μια επιφάνεια εκ περιστροφής γίνεται από μια περιφέρεια κύκλου η οποία έχει κέντρο του άξονα περιστροφής.

Πρόβλημα: Να βρεθεί η εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας, η οποία παράγεται με περιστροφή της καμπύλης:

$$(\gamma) : \{ f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0 \} \text{ γύρω από την ευθεία.}$$

$$(ε) : \left\{ \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{\gamma} \right\}$$

Απάντηση: Θα βρούμε πρώτα τις εξισώσεις της κυκλικής περιφέρειας κύκλου. Ένα επίπεδο κάθετο στην (ε) έχει εξίσωση:

$$ax + by + \gamma z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Σύμφωνα με το

Επίσης, μια σφαίρα με κέντρο $P = (x_0, y_0, z_0)$ έχει
εξίσωση

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \rho^2$$

Ο κύκλος με κέντρο επί της (ϵ) και GE επί του κάθετου
στην (ϵ) έχει εξίσωση:

$$(II)_3 \begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \rho^2 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \end{cases}$$

με $\rho, \delta \in \mathbb{R}$. Θα πρέπει να προσδιορίσουμε για ποιες
τιμές των ρ, δ οι Πωλ έχουν στην περιφέρεια
στην (ϵ) της γενετικής (γ) . Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \rho^2 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \end{cases}$$

με συνολικά των x, y, z λαμβάνουμε μια εξίσωση
 $\phi(\rho^2, \delta) = 0$

Επομένως η επιφ. εκ περιφ. έχει εξίσωση της
μορφής:

$$\phi((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, \alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \quad (*)$$

Σημείωση: Μια επιφάνεια με εξίσωση $(*)$ περιγράφει
επιφ. εκ περιφ. με αξία την ευθεία (ϵ) που
διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0, z_0)$ και κάθετη στο
επίπεδο $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Παράδειγμα 3 Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας εκ περιστροφής που παράγεται με περιστροφή της καμπύλης

$$(\gamma) : \begin{cases} y = x^3 \\ z = 0 \end{cases}$$

γύρω από την ευθεία $(\epsilon) : \begin{cases} \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-2}{0} \end{cases}$

Λύση Η κωδικοποιημένη περιφέρεια έχει εξίσωση

$$(\pi) : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-2)^2 = \rho^2 \\ x = \lambda \end{cases}$$

Αν θεωρήσουμε το άθροισμα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-2)^2 = \rho^2 \\ x = \lambda \\ y = x^3 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-2)^2 = \rho^2 \\ x = \lambda \\ y = \lambda^3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τα λ, μ, ν έχουμε:

$$\lambda^2 + \lambda^6 + 4 = \rho^2$$

Αντικαθιστώντας τους παραμέτρους έχουμε:

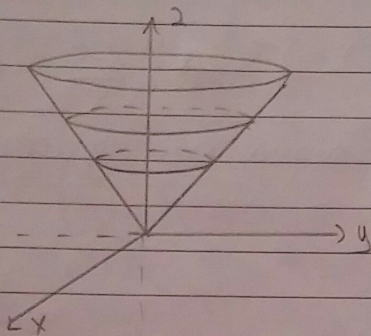
$$x^2 + x^6 + 4 = x^2 + y^2 + (z-2)^2$$

που είναι η επιφάνεια που ζητάμε. $\square$

Παράδειγμα 3: Δίνεται η ευθεία:

$$(E): \begin{cases} y=2, \\ x=0 \end{cases}$$

την περιστρέφουμε γύρω από τον άξονα Oz . Θέλουμε να βρούμε την επιφάνεια εκ περιστροφής που προκύπτει.



Οι εξισώσεις του άξονα είναι: $(E): \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

Η κινούμενη περιφέρεια κύκλου έχει εξισώσεις:

$$(\pi): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ z = d \end{cases}$$

Για να βρούμε ποια εξίσωση πήραμε τα ρ, d θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ z = d \\ y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{με απαλοιφή} \\ \underline{x^2 + y^2} \end{array} \quad 2d^2 = \rho^2$$

Με απαλοιφή των μεταβλητών έχουμε

$$2d^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$$

" ΑΣΚΗΣΕΙΣ "

Φύλλαδιο 10:

1.1 Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $(0,0,0)$ και οδηγό την καμπύλη:
 $(\gamma): (x^2+y^2=x, z=1)$

Πύση Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $K(a,0,0)$ περιγράφονται από την εξίσωση

$$(E_{\alpha\beta\gamma}): \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-0}{\alpha} = \frac{y-0}{\beta} = \frac{z-0}{\gamma} \end{array} \right\}$$

Θα πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές των παραμέτρων οι ευθείες $(E_{\alpha\beta\gamma})$ διανοίγουν την καμπύλη (γ) . Έτσι, λαμβάνουμε το σύστημα:

$$\begin{array}{l} \text{Εξίσωση καμπύλης} \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=x \\ z=1 \end{array} \right. \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=x \\ z=1 \end{array} \right. \\ \text{Εξίσωση των ευθειών} \left\{ \begin{array}{l} y=\frac{\beta}{\alpha}x \\ z=\frac{\gamma}{\alpha}x \end{array} \right. \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=x \\ x=\frac{\alpha}{\gamma} \\ y=\frac{\beta}{\gamma} \end{array} \right.$$

Με αναγωγή των x, y, z έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha}{\gamma} \iff \alpha^2 + \beta^2 = \alpha\gamma \quad (*)$$

Από την εξίσωση της $(E_{\alpha\beta\gamma})$ έχουμε:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = t$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\alpha t \\ y=\beta t \\ z=\gamma t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha=\frac{x}{t} \\ \beta=\frac{y}{t} \\ \gamma=\frac{z}{t} \end{array} \right. \quad (**)$$

Αντικαθιστώντας $(**)$ στην $(*)$:

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2} = \frac{x^2}{t^2} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=x}$$

Είναι η επιφάνεια που ζητάμε

12 Να δείχθει ότι η εξίσωση:

$$xy + z^2 - 2x - y + 2 = 0$$

παριστάει κωνική επιφάνεια. Να βρεθεί η κορυφή της και μια οδηγός κατεύθυνση.

Πύση: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(x, y, z) = xy + z^2 - 2x - y + 2 = 0$$

Για να παριστάει η εξίσωση κωνική επιφ., θα πρέπει να υπάρχουν α, β, γ τέτοια ώστε η

$$F(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma) \text{ να είναι ομογενής ως προς } x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$$

$$\text{Ποσούμε, } X = x-\alpha, Y = y-\beta, Z = z-\gamma$$

$$F(X, Y, Z) = (X+\alpha)(Y+\beta) + (Z+\gamma)^2 - 2(X+\alpha) - (Y+\beta) + 2$$

$$= XY + Z^2 + \underline{(B-2)}X + \underline{(\alpha-1)}Y + \underline{2\gamma}Z + \underline{\alpha\beta + \gamma^2 - 2\alpha - \beta + 2}$$

$$\text{Αρα θα πρέπει } \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \\ \gamma = 0 \\ \alpha\beta + \gamma^2 - 2\alpha - \beta + 2 = 0 \end{cases}$$

Η κορυφή της κωνικής επιφ. είναι το σημείο $K(1, 2, 0)$.

Μια κατεύθυνση προκύπτει τελώντας την επιφάνεια με ωφαίρα.

1.3) Να αποδειχθεί ότι η επιφάνεια

$$4\left(\frac{x-3}{y}\right)^2 + 9\left(\frac{y+2-1}{y}\right)^2 = 36, \text{ παριστάνει κωνική επιφάνεια}$$

Λύση: Η εξίσωση γραφεται ισοδύναμα στην μορφή

$$4(x-3)^2 + 9(y+2-1)^2 = 36y^2$$

παριστάνει ότι η εξίσωση γραφεται ως,

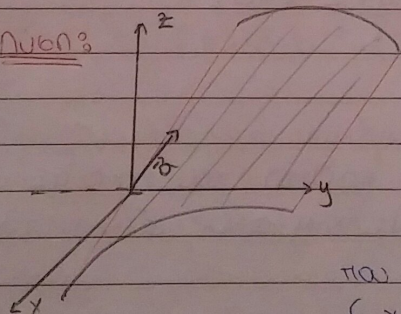
$$F(x-3, y+2-1, y) = 0$$

Οπότε έχουμε κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο που πάρει το 6ο βήμα:

$$\begin{cases} x-3=0 \\ y+2-1=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{Άρα κορυφή } K(3, 0, 1)$$

1.4) Να βρεθεί η κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς το $\vec{a} = (1, 1, 2)$ και άξονα των καμπυλών $(\gamma): (xy=1, z=0)$

Λύση:



Μια ευθεία που είναι παράλληλη προς το $\vec{a} = (1, 1, 2)$ είναι

$$(\varepsilon): \begin{cases} x = y = z \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{cases}$$

που ισοδύναμα γραφεται ως εξής:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

Επομένως, όλες οι ευθείες που είναι παράλληλες προς το $\vec{a} = (1, 1, 2)$ περιγράφονται από την εξίσωση:

$$(\varepsilon_{\mu}): \begin{cases} x-y=\mu \\ 2y-z=\mu \end{cases}$$

Θα πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές του λ , οι
(ΕΔ) συναντάει την κοκινύλη (γ)

Δεικνύμε το σύστημα

$$\begin{cases} xy=1 \\ z=0 \\ x-y=\lambda \\ 2y-z=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=1 \\ z=0 \\ y=\mu/2 \\ x=\lambda+\mu/2 \end{cases}$$

Με αναδοχή των x, y, z βλέπουμε ότι οι παράμετροι
 λ, μ πληρούν την εξίσωση

$$\left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right) \frac{\mu}{2} = 1$$

Εναλλαφέντως τις μεταβλητές έχουμε ότι

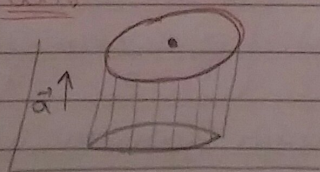
$$(x-y + \frac{2y-z}{2}) \frac{2y-z}{2} = 1$$

1.7 Να βρεθεί η ορθή προβολή της κοκινύλης

$$(\gamma): (x^2+y^2+z^2=4, x+3y+z-2=0)$$

στο επίπεδο $x-y+z=0$

Πίση



Το κοθέτο του επιπέδου

$$(\pi): x-y+z=0 \text{ είναι το } \vec{d}=(1,-1,1)$$

Αρα η προβολή που ζητάμε προκύπτει ως τομή της
κυλινδρικής επιφ. (Ε) με οδηγό-του (γ) και
γενετικές πολλές προς το $\vec{d}$, με το επίπεδο (π) .
Ας υπολογίσουμε την κυλινδρ. επιφάνεια (Ε)

Μια ευθεία παράλληλη προς το $\vec{a}$ είναι η

$$(E): \begin{cases} x = y = z \\ 1 \quad -1 \quad 1 \end{cases} \Leftrightarrow (E): \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Επομένως όλες οι ευθείες που είναι παράλλες προς το $\vec{a}$ περιγράφονται από την εξίσωση

$$(E_{\lambda\mu}): \begin{cases} x+y=\lambda \\ y+z=\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Πο να βρούμε ποιες εξισώσεις παίρνουν λ, μ θεωρούμε το άκρικο.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+3y+z=2 \\ x+y=\lambda \\ y+z=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+y+y+z=2 \\ x+y=\lambda \\ y+z=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x=2-\lambda-\mu \\ y=2-\lambda-\mu \\ z=2+2\mu-2 \end{cases}$$

Με οριστική x, y, z βρίσκουμε ότι οι παραμέτροι παίρνουν την εξίσωση

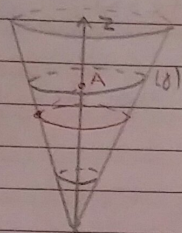
$$(2\lambda+\mu-2)^2 + (2-\lambda-\mu)^2 + (2+2\mu-2)^2 = 4$$

Αρα κυλινδρική επιφάνεια είναι η

$$(E): (2x+3y+z-2)^2 + (x+2y+z-2)^2 + (x+2y+3z-2)^2 = 4$$

Η προβολή είναι $J = E \cap \Pi$

19) Να βρεθεί οι εξισώσεις του γεωμετρικού τόπου των ορθών προβολών του σημείου $A(0,0,1)$ στις γενετείρες του κώνου: $z^2 = x^2 + y^2$

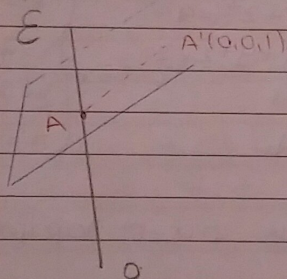


Ο κώνος $z^2 = x^2 + y^2$ έχει ως κορυφή το $K(0,0,0)$ και ως οδηγό τον κύκλο

$$(γ): \{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$$

Έστω P ένα τυχαίο σημείο της $(γ)$. Τότε υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε: $\vec{OP} = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$.

Οπότε η εξίσωση της γενετείρας που διέρχεται από το P είναι: $E(t) = t(\cos\theta, \sin\theta, 1)$



Ας υπολογίσουμε την προβολή A' του A στην ευθεία $(ε)$. Η προβολή θα προκύψει ως τομή του επιπέδου (π) που διέρχεται από το A και είναι κάθετο στην ευθεία, με την ευθεία.

Το επίπεδο (π) έχει εξίσωση $(\pi): \cos\theta x + \sin\theta y + z - 1 = 0$. Η τομή του (π) με την $(ε)$ είναι το $A' = (t\cos\theta, t\sin\theta, t)$ με

$$\cos^2\theta t + \sin^2\theta t + t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1/2$$

$$\text{Άρα } A' = \left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta, \frac{1}{2}\right)$$

Βλέπουμε ότι το A' βρίσκεται στον κύκλο

$$(γ): \left\{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{2}\right\}$$